

# ELEMENTI DI INFORMATICA TEORICA

## Parte 1: Logica Matematica

### 1.3 Semantica della logica proposizionale

Giovanni Amendola

Corso di laurea triennale in Informatica  
Università della Calabria

12 marzo 2022

Anno Accademico 2021/2022

## Completezza di insiemi di connettivi

### Definizione: Funzione di verità

Sia  $\alpha$  una proposizione avente esattamente  $n$  atomi distinti  $A_1, A_2, \dots, A_n$ . La funzione  $f_\alpha : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$  t.c.  $f_\alpha(v_1, \dots, v_n) = I_{\mathcal{V}}(\alpha)$ , dove  $\mathcal{V}$  è l'interpretazione per cui  $\mathcal{V}(A_i) = v_i$ , per  $i = 1, \dots, n$ , è detta *funzione di verità* associata ad  $\alpha$ .

## Completezza di insiemi di connettivi

### Definizione: Funzione di verità

Sia  $\alpha$  una proposizione avente esattamente  $n$  atomi distinti  $A_1, A_2, \dots, A_n$ . La funzione  $f_\alpha : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$  t.c.  $f_\alpha(v_1, \dots, v_n) = I_{\mathcal{V}}(\alpha)$ , dove  $\mathcal{V}$  è l'interpretazione per cui  $\mathcal{V}(A_i) = v_i$ , per  $i = 1, \dots, n$ , è detta *funzione di verità* associata ad  $\alpha$ .

### Esempio

Sia  $\alpha = A \wedge B \vee \neg C$ . Chi è  $f_\alpha$ ?

# Completezza di insiemi di connettivi

## Definizione: Funzione di verità

Sia  $\alpha$  una proposizione avente esattamente  $n$  atomi distinti  $A_1, A_2, \dots, A_n$ . La funzione  $f_\alpha : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$  t.c.  $f_\alpha(v_1, \dots, v_n) = I_{\mathcal{V}}(\alpha)$ , dove  $\mathcal{V}$  è l'interpretazione per cui  $\mathcal{V}(A_i) = v_i$ , per  $i = 1, \dots, n$ , è detta *funzione di verità* associata ad  $\alpha$ .

## Esempio

Sia  $\alpha = A \wedge B \vee \neg C$ . Chi è  $f_\alpha$ ?

$$f_\alpha : \{0, 1\}^3 \rightarrow \{0, 1\}, \text{ dove}$$

$$\{0, 1\}^3 = \{(0, 0, 0), (0, 0, 1), (0, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 0), (1, 0, 1), (1, 1, 0), (1, 1, 1)\}$$

$$f_\alpha(0, 0, 0) = I_{\mathcal{V}}(\alpha) = 1$$

$$f_\alpha(0, 0, 1) = I_{\mathcal{V}}(\alpha) = 0$$

$$f_\alpha(0, 1, 0) = I_{\mathcal{V}}(\alpha) = 1$$

$$f_\alpha(0, 1, 1) = I_{\mathcal{V}}(\alpha) = 0$$

$$f_\alpha(1, 0, 0) = I_{\mathcal{V}}(\alpha) = 1$$

$$f_\alpha(1, 0, 1) = I_{\mathcal{V}}(\alpha) = 0$$

$$f_\alpha(1, 1, 0) = I_{\mathcal{V}}(\alpha) = 1$$

$$f_\alpha(1, 1, 1) = I_{\mathcal{V}}(\alpha) = 1$$

## Completezza di insiemi di connettivi

### Definizione: Funzione di verità

Sia  $\alpha$  una proposizione avente esattamente  $n$  atomi distinti  $A_1, A_2, \dots, A_n$ . La funzione  $f_\alpha : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$  t.c.  $f_\alpha(v_1, \dots, v_n) = I_{\mathcal{V}}(\alpha)$ , dove  $\mathcal{V}$  è l'interpretazione per cui  $\mathcal{V}(A_i) = v_i$ , per  $i = 1, \dots, n$ , è detta *funzione di verità* associata ad  $\alpha$ .

### Domanda

Qual è la funzione di verità associata alla proposizione  $A \wedge B$ ?

## Completezza di insiemi di connettivi

### Definizione: Funzione di verità

Sia  $\alpha$  una proposizione avente esattamente  $n$  atomi distinti  $A_1, A_2, \dots, A_n$ . La funzione  $f_\alpha : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$  t.c.  $f_\alpha(v_1, \dots, v_n) = I_{\mathcal{V}}(\alpha)$ , dove  $\mathcal{V}$  è l'interpretazione per cui  $\mathcal{V}(A_i) = v_i$ , per  $i = 1, \dots, n$ , è detta *funzione di verità* associata ad  $\alpha$ .

### Domanda

Qual è la funzione di verità associata alla proposizione  $A \wedge B$ ?

$$f_{A \wedge B} : \{0, 1\}^2 \rightarrow \{0, 1\}, \text{ dove}$$

$$f_{A \wedge B}(0, 0) = I_{\mathcal{V}}(A \wedge B) = 0$$

$$f_{A \wedge B}(0, 1) = I_{\mathcal{V}}(A \wedge B) = 0$$

$$f_{A \wedge B}(1, 0) = I_{\mathcal{V}}(A \wedge B) = 0$$

$$f_{A \wedge B}(1, 1) = I_{\mathcal{V}}(A \wedge B) = 1$$

Dunque,  $f_{A \wedge B} = \mathcal{O}_\wedge$ .

## Completezza di insiemi di connettivi

### Definizione: Funzione di verità

Sia  $\alpha$  una proposizione avente esattamente  $n$  atomi distinti  $A_1, A_2, \dots, A_n$ . La funzione  $f_\alpha : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$  t.c.  $f_\alpha(v_1, \dots, v_n) = I_{\mathcal{V}}(\alpha)$ , dove  $\mathcal{V}$  è l'interpretazione per cui  $\mathcal{V}(A_i) = v_i$ , per  $i = 1, \dots, n$ , è detta *funzione di verità* associata ad  $\alpha$ .

### Osservazioni

- Ogni proposizione con  $n$  atomi distinti definisce una funzione  $n$ -aria.

# Completezza di insiemi di connettivi

## Definizione: Funzione di verità

Sia  $\alpha$  una proposizione avente esattamente  $n$  atomi distinti  $A_1, A_2, \dots, A_n$ . La funzione  $f_\alpha : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$  t.c.  $f_\alpha(v_1, \dots, v_n) = I_{\mathcal{V}}(\alpha)$ , dove  $\mathcal{V}$  è l'interpretazione per cui  $\mathcal{V}(A_i) = v_i$ , per  $i = 1, \dots, n$ , è detta *funzione di verità* associata ad  $\alpha$ .

## Osservazioni

- Ogni proposizione con  $n$  atomi distinti definisce una funzione  $n$ -aria.
- Consideriamo  $n$  atomi. Quante sono le possibili funzioni di verità?

# Completezza di insiemi di connettivi

## Definizione: Funzione di verità

Sia  $\alpha$  una proposizione avente esattamente  $n$  atomi distinti  $A_1, A_2, \dots, A_n$ . La funzione  $f_\alpha : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$  t.c.  $f_\alpha(v_1, \dots, v_n) = I_{\mathcal{V}}(\alpha)$ , dove  $\mathcal{V}$  è l'interpretazione per cui  $\mathcal{V}(A_i) = v_i$ , per  $i = 1, \dots, n$ , è detta *funzione di verità* associata ad  $\alpha$ .

## Osservazioni

- Ogni proposizione con  $n$  atomi distinti definisce una funzione  $n$ -aria.
- Consideriamo  $n$  atomi. Quante sono le possibili funzioni di verità?  $2^{2^n}$

# Completezza di insiemi di connettivi

## Definizione: Funzione di verità

Sia  $\alpha$  una proposizione avente esattamente  $n$  atomi distinti  $A_1, A_2, \dots, A_n$ . La funzione  $f_\alpha : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$  t.c.  $f_\alpha(v_1, \dots, v_n) = I_{\mathcal{V}}(\alpha)$ , dove  $\mathcal{V}$  è l'interpretazione per cui  $\mathcal{V}(A_i) = v_i$ , per  $i = 1, \dots, n$ , è detta *funzione di verità* associata ad  $\alpha$ .

## Osservazioni

- Ogni proposizione con  $n$  atomi distinti definisce una funzione  $n$ -aria.
- Consideriamo  $n$  atomi. Quante sono le possibili funzioni di verità?  $2^{2^n}$
- I **connettivi** possono essere visti come **funzioni di verità**.

# Completezza di insiemi di connettivi

## Definizione: Funzione di verità

Sia  $\alpha$  una proposizione avente esattamente  $n$  atomi distinti  $A_1, A_2, \dots, A_n$ . La funzione  $f_\alpha : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$  t.c.  $f_\alpha(v_1, \dots, v_n) = I_{\mathcal{V}}(\alpha)$ , dove  $\mathcal{V}$  è l'interpretazione per cui  $\mathcal{V}(A_i) = v_i$ , per  $i = 1, \dots, n$ , è detta *funzione di verità* associata ad  $\alpha$ .

## Osservazioni

- Ogni proposizione con  $n$  atomi distinti definisce una funzione  $n$ -aria.
- Consideriamo  $n$  atomi. Quante sono le possibili funzioni di verità?  $2^{2^n}$
- I **connettivi** possono essere visti come **funzioni di verità**.
- Al massimo possiamo avere  $2^{2^2} = 16$  diversi connettivi binari.

# Completezza di insiemi di connettivi

## Definizione: Funzione di verità

Sia  $\alpha$  una proposizione avente esattamente  $n$  atomi distinti  $A_1, A_2, \dots, A_n$ . La funzione  $f_\alpha : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$  t.c.  $f_\alpha(v_1, \dots, v_n) = I_{\mathcal{V}}(\alpha)$ , dove  $\mathcal{V}$  è l'interpretazione per cui  $\mathcal{V}(A_i) = v_i$ , per  $i = 1, \dots, n$ , è detta *funzione di verità* associata ad  $\alpha$ .

## Osservazioni

- Ogni proposizione con  $n$  atomi distinti definisce una funzione  $n$ -aria.
- Consideriamo  $n$  atomi. Quante sono le possibili funzioni di verità?  $2^{2^n}$
- I **connettivi** possono essere visti come **funzioni di verità**.
- Al massimo possiamo avere  $2^{2^2} = 16$  diversi connettivi binari.

## Definizione: Riduzione di connettivi

Dato un insieme di connettivi  $\mathcal{C}$  e un connettivo  $c \notin \mathcal{C}$  per cui si abbia una funzione di verità  $f_c = \mathcal{O}_c$ , diciamo che  $c$  *si definisce in termini dei connettivi di*  $\mathcal{C}$  se esiste una proposizione  $\alpha$  costruita con i connettivi in  $\mathcal{C}$  tale che  $f_c \equiv f_\alpha$ .

## Completezza di insiemi di connettivi

### Definizione: Riduzione di connettivi

Dato un insieme di connettivi  $\mathcal{C}$  e un connettivo  $c \notin \mathcal{C}$  per cui si abbia una funzione di verità  $f_c = \mathcal{O}_c$ , diciamo che  $c$  si definisce in termini dei connettivi di  $\mathcal{C}$  se esiste una proposizione  $\alpha$  costruita con i connettivi in  $\mathcal{C}$  tale che  $f_c \equiv f_\alpha$ .

### Esempio

Il connettivo  $\wedge$  può essere definito nei termini di  $\{\neg, \vee\}$ :

$$A \wedge B \equiv \neg(\neg A \vee \neg B)$$

# Completezza di insiemi di connettivi

## Definizione: Riduzione di connettivi

Dato un insieme di connettivi  $\mathcal{C}$  e un connettivo  $c \notin \mathcal{C}$  per cui si abbia una funzione di verità  $f_c = \mathcal{O}_c$ , diciamo che  $c$  si definisce in termini dei connettivi di  $\mathcal{C}$  se esiste una proposizione  $\alpha$  costruita con i connettivi in  $\mathcal{C}$  tale che  $f_c \equiv f_\alpha$ .

## Esempio

Il connettivo  $\wedge$  può essere definito nei termini di  $\{\neg, \vee\}$ :

$$A \wedge B \equiv \neg(\neg A \vee \neg B)$$

## Altre derivazioni dei connettivi

$$\begin{aligned} A \rightarrow B &\equiv \neg A \vee B & A \vee B &\equiv \neg A \rightarrow B \\ A \vee B &\equiv \neg(\neg A \wedge \neg B) & A \wedge B &\equiv \neg(\neg A \vee \neg B) \\ A \wedge B &\equiv (((A \rightarrow \perp) \rightarrow \perp) \rightarrow (B \rightarrow \perp)) \rightarrow \perp \\ &\quad \neg A &\equiv A \rightarrow \perp \\ &\quad \perp &\equiv A \wedge \neg A \\ A \leftrightarrow B &\equiv (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A) \end{aligned}$$

# Completezza di insiemi di connettivi

## Definizione: Completezza di connettivi

Un insieme di connettivi  $\mathcal{C}$  si dice **completo** se data una qualunque funzione booleana  $f : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$  esiste una proposizione  $\alpha$  costruita mediante i connettivi di  $\mathcal{C}$  tale che  $f \equiv f_\alpha$ .

# Completezza di insiemi di connettivi

## Definizione: Completezza di connettivi

Un insieme di connettivi  $\mathcal{C}$  si dice **completo** se data una qualunque funzione booleana  $f : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$  esiste una proposizione  $\alpha$  costruita mediante i connettivi di  $\mathcal{C}$  tale che  $f \equiv f_\alpha$ .

## Teoremi

# Completezza di insiemi di connettivi

## Definizione: Completezza di connettivi

Un insieme di connettivi  $\mathcal{C}$  si dice **completo** se data una qualunque funzione booleana  $f : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$  esiste una proposizione  $\alpha$  costruita mediante i connettivi di  $\mathcal{C}$  tale che  $f \equiv f_\alpha$ .

## Teoremi

- L'insieme dei connettivi  $\{\neg, \wedge, \vee\}$  è completo.

# Completezza di insiemi di connettivi

## Definizione: Completezza di connettivi

Un insieme di connettivi  $\mathcal{C}$  si dice **completo** se data una qualunque funzione booleana  $f : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$  esiste una proposizione  $\alpha$  costruita mediante i connettivi di  $\mathcal{C}$  tale che  $f \equiv f_\alpha$ .

## Teoremi

- L'insieme dei connettivi  $\{\neg, \wedge, \vee\}$  è completo.
- Gli insiemi di connettivi  $\{\neg, \vee\}$  e  $\{\neg, \wedge\}$  sono completi.

# Completezza di insiemi di connettivi

## Definizione: Completezza di connettivi

Un insieme di connettivi  $\mathcal{C}$  si dice **completo** se data una qualunque funzione booleana  $f : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$  esiste una proposizione  $\alpha$  costruita mediante i connettivi di  $\mathcal{C}$  tale che  $f \equiv f_\alpha$ .

## Teoremi

- L'insieme dei connettivi  $\{\neg, \wedge, \vee\}$  è completo.
- Gli insiemi di connettivi  $\{\neg, \vee\}$  e  $\{\neg, \wedge\}$  sono completi.
- Il connettivo binario *nand* è completo.

$$\text{nand}(0, 0) = 1 \quad \text{nand}(0, 1) = 1 \quad \text{nand}(1, 0) = 1 \quad \text{nand}(1, 1) = 0$$

# Completezza di insiemi di connettivi

## Definizione: Completezza di connettivi

Un insieme di connettivi  $\mathcal{C}$  si dice **completo** se data una qualunque funzione booleana  $f : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$  esiste una proposizione  $\alpha$  costruita mediante i connettivi di  $\mathcal{C}$  tale che  $f \equiv f_\alpha$ .

## Teoremi

- L'insieme dei connettivi  $\{\neg, \wedge, \vee\}$  è completo.
- Gli insiemi di connettivi  $\{\neg, \vee\}$  e  $\{\neg, \wedge\}$  sono completi.
- Il connettivo binario *nand* è completo.

$$\text{nand}(0, 0) = 1 \quad \text{nand}(0, 1) = 1 \quad \text{nand}(1, 0) = 1 \quad \text{nand}(1, 1) = 0$$

- Il connettivo binario *nor* è completo.

$$\text{nor}(0, 0) = 1 \quad \text{nor}(0, 1) = 0 \quad \text{nor}(1, 0) = 0 \quad \text{nor}(1, 1) = 0$$

# Completezza di insiemi di connettivi

## Definizione: Completezza di connettivi

Un insieme di connettivi  $\mathcal{C}$  si dice **completo** se data una qualunque funzione booleana  $f : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$  esiste una proposizione  $\alpha$  costruita mediante i connettivi di  $\mathcal{C}$  tale che  $f \equiv f_\alpha$ .

## Teoremi

- L'insieme dei connettivi  $\{\neg, \wedge, \vee\}$  è completo.
- Gli insiemi di connettivi  $\{\neg, \vee\}$  e  $\{\neg, \wedge\}$  sono completi.
- Il connettivo binario *nand* è completo.

$$\text{nand}(0, 0) = 1 \quad \text{nand}(0, 1) = 1 \quad \text{nand}(1, 0) = 1 \quad \text{nand}(1, 1) = 0$$

- Il connettivo binario *nor* è completo.

$$\text{nor}(0, 0) = 1 \quad \text{nor}(0, 1) = 0 \quad \text{nor}(1, 0) = 0 \quad \text{nor}(1, 1) = 0$$

- I connettivi *nand* e *nor* sono gli unici connettivi binari che da soli costituiscono un insieme completo.

# Modelli

## Definizione: Modello

Sia  $\mathcal{M}$  un insieme di simboli proposizionali (detto anche *interpretazione*).  
Definiamo la *relazione di soddisfacibilità*  $\models$  (leggi: “modella”) induttivamente:

1.  $\mathcal{M} \models A$  sse  $A \in \mathcal{M}$ ;
2.  $\mathcal{M} \models \top$  e  $\mathcal{M} \not\models \perp$ ;
3.  $\mathcal{M} \models \neg\alpha$  sse  $\mathcal{M} \not\models \alpha$ ;
4.  $\mathcal{M} \models \alpha \wedge \beta$  sse  $\mathcal{M} \models \alpha$  e  $\mathcal{M} \models \beta$ ;
5.  $\mathcal{M} \models \alpha \vee \beta$  sse  $\mathcal{M} \models \alpha$  o  $\mathcal{M} \models \beta$ ;
6.  $\mathcal{M} \models \alpha \rightarrow \beta$  sse  $\mathcal{M} \not\models \alpha$  o  $\mathcal{M} \models \beta$ ;
7.  $\mathcal{M} \models \alpha \leftrightarrow \beta$  sse  $\mathcal{M} \models \alpha$  e  $\mathcal{M} \models \beta$  oppure  $\mathcal{M} \not\models \alpha$  e  $\mathcal{M} \not\models \beta$ .

Data una formula  $\alpha$ . Se  $\mathcal{M} \models \alpha$ , diremo che  $\mathcal{M}$  è un *modello* di  $\alpha$ .

# Modelli

## Definizione: Modello

Sia  $\mathcal{M}$  un insieme di simboli proposizionali (detto anche *interpretazione*).  
Definiamo la *relazione di soddisfacibilità*  $\models$  (leggi: "modella") induttivamente:

1.  $\mathcal{M} \models A$  sse  $A \in \mathcal{M}$ ;
2.  $\mathcal{M} \models \top$  e  $\mathcal{M} \not\models \perp$ ;
3.  $\mathcal{M} \models \neg\alpha$  sse  $\mathcal{M} \not\models \alpha$ ;
4.  $\mathcal{M} \models \alpha \wedge \beta$  sse  $\mathcal{M} \models \alpha$  e  $\mathcal{M} \models \beta$ ;
5.  $\mathcal{M} \models \alpha \vee \beta$  sse  $\mathcal{M} \models \alpha$  o  $\mathcal{M} \models \beta$ ;
6.  $\mathcal{M} \models \alpha \rightarrow \beta$  sse  $\mathcal{M} \not\models \alpha$  o  $\mathcal{M} \models \beta$ ;
7.  $\mathcal{M} \models \alpha \leftrightarrow \beta$  sse  $\mathcal{M} \models \alpha$  e  $\mathcal{M} \models \beta$  oppure  $\mathcal{M} \not\models \alpha$  e  $\mathcal{M} \not\models \beta$ .

Data una formula  $\alpha$ . Se  $\mathcal{M} \models \alpha$ , diremo che  $\mathcal{M}$  è un *modello* di  $\alpha$ .

## Osservazione (relazione tra modello e valutazione booleana)

$$A \in \mathcal{M} \text{ se e solo se } \mathcal{V}(A) = 1$$

# Modelli

## Alcune definizioni

- Sia  $\Gamma$  un insieme di formule proposizionali. Se  $\mathcal{M}$  modella tutte le formule di  $\Gamma$ , ovvero  $\mathcal{M} \models \alpha$  per ogni  $\alpha \in \Gamma$ , allora diremo che  $\mathcal{M}$  è *un modello di  $\Gamma$*  e scriveremo  $\mathcal{M} \models \Gamma$ .

# Modelli

## Alcune definizioni

- Sia  $\Gamma$  un insieme di formule proposizionali. Se  $\mathcal{M}$  modella tutte le formule di  $\Gamma$ , ovvero  $\mathcal{M} \models \alpha$  per ogni  $\alpha \in \Gamma$ , allora diremo che  $\mathcal{M}$  è *un modello di  $\Gamma$*  e scriveremo  $\mathcal{M} \models \Gamma$ .
- Se  $\mathcal{M} \models \alpha$  per qualche  $\mathcal{M}$ , allora diciamo che  $\alpha$  è *soddisfacibile*.

# Modelli

## Alcune definizioni

- Sia  $\Gamma$  un insieme di formule proposizionali. Se  $\mathcal{M}$  modella tutte le formule di  $\Gamma$ , ovvero  $\mathcal{M} \models \alpha$  per ogni  $\alpha \in \Gamma$ , allora diremo che  $\mathcal{M}$  è *un modello di  $\Gamma$*  e scriveremo  $\mathcal{M} \models \Gamma$ .
- Se  $\mathcal{M} \models \alpha$  per qualche  $\mathcal{M}$ , allora diciamo che  $\alpha$  è *soddisfacibile*.
- Se  $\alpha$  è una tautologia (cioè è vera in ogni modello), allora scriveremo  $\models \alpha$ .

# Modelli

## Alcune definizioni

- Sia  $\Gamma$  un insieme di formule proposizionali. Se  $\mathcal{M}$  modella tutte le formule di  $\Gamma$ , ovvero  $\mathcal{M} \models \alpha$  per ogni  $\alpha \in \Gamma$ , allora diremo che  $\mathcal{M}$  è *un modello di  $\Gamma$*  e scriveremo  $\mathcal{M} \models \Gamma$ .
- Se  $\mathcal{M} \models \alpha$  per qualche  $\mathcal{M}$ , allora diciamo che  $\alpha$  è *soddisfacibile*.
- Se  $\alpha$  è una tautologia (cioè è vera in ogni modello), allora scriveremo  $\models \alpha$ .
- Se per nessun insieme  $\mathcal{M}$  è verificato che  $\mathcal{M} \models \alpha$ , allora diciamo che  $\alpha$  è *insoddisfacibile*. Dunque una formula  $\alpha$  è insoddisfacibile sse non esiste alcun modello per  $\alpha$ .

# Modelli

## Alcuni esempi

- La formula  $A \wedge B$  ha  $\{A, B\}$  come modello. Dunque è soddisfacibile.
- La formula  $A \wedge \neg B$  ha  $\{A\}$  come modello. Dunque è soddisfacibile.
- La formula  $A \wedge \neg A$  non ha alcun modello. Dunque è insoddisfacibile.
- La formula  $A \rightarrow B$  ha  $\emptyset$ ,  $\{B\}$ ,  $\{A, B\}$  come modelli; mentre  $\{A\}$  non lo è.
- La formula  $A \vee B$  ha  $\{A\}$ ,  $\{B\}$ ,  $\{A, B\}$  come modelli.
- La formula  $A \rightarrow ((B \wedge C) \vee (C \rightarrow \neg A))$  ha  $\{A, B\}$  come modello.

## Implicazione logica

- Se  $\alpha$  **implica logicamente**  $\beta$ , allora la formula  $\alpha \rightarrow \beta$  è una tautologia, per cui possiamo scrivere

$$\models \alpha \rightarrow \beta$$

## Implicazione logica

- Se  $\alpha$  **implica logicamente**  $\beta$ , allora la formula  $\alpha \rightarrow \beta$  è una tautologia, per cui possiamo scrivere

$$\models \alpha \rightarrow \beta$$

- Se  $\alpha$  è **logicamente equivalente** a  $\beta$ , allora la formula  $\alpha \leftrightarrow \beta$  è una tautologia, per cui possiamo scrivere

$$\models \alpha \leftrightarrow \beta$$

# Implicazione logica

- Se  $\alpha$  **implica logicamente**  $\beta$ , allora la formula  $\alpha \rightarrow \beta$  è una tautologia, per cui possiamo scrivere

$$\models \alpha \rightarrow \beta$$

- Se  $\alpha$  è **logicamente equivalente** a  $\beta$ , allora la formula  $\alpha \leftrightarrow \beta$  è una tautologia, per cui possiamo scrivere

$$\models \alpha \leftrightarrow \beta$$

- Sia  $\Gamma$  un insieme di proposizioni. Se  $\Gamma$  **implica logicamente**  $\alpha$ , scriveremo  $\Gamma \models \alpha$ . In altri termini:

$$\Gamma \models \alpha \text{ sse per ogni } \mathcal{M}, \mathcal{M} \models \Gamma \text{ implica } \mathcal{M} \models \alpha.$$

## Implicazione logica

- Se  $\alpha$  **implica logicamente**  $\beta$ , allora la formula  $\alpha \rightarrow \beta$  è una tautologia, per cui possiamo scrivere

$$\models \alpha \rightarrow \beta$$

- Se  $\alpha$  è **logicamente equivalente** a  $\beta$ , allora la formula  $\alpha \leftrightarrow \beta$  è una tautologia, per cui possiamo scrivere

$$\models \alpha \leftrightarrow \beta$$

- Sia  $\Gamma$  un insieme di proposizioni. Se  $\Gamma$  **implica logicamente**  $\alpha$ , scriveremo  $\Gamma \models \alpha$ . In altri termini:

$$\Gamma \models \alpha \text{ sse per ogni } \mathcal{M}, \mathcal{M} \models \Gamma \text{ implica } \mathcal{M} \models \alpha.$$

- Un insieme finito di proposizioni  $\Gamma$  è **insoddisfacibile** se e solo se  $\Gamma \models \perp$ .

## Implicazione logica

- Se  $\alpha$  **implica logicamente**  $\beta$ , allora la formula  $\alpha \rightarrow \beta$  è una tautologia, per cui possiamo scrivere

$$\models \alpha \rightarrow \beta$$

- Se  $\alpha$  è **logicamente equivalente** a  $\beta$ , allora la formula  $\alpha \leftrightarrow \beta$  è una tautologia, per cui possiamo scrivere

$$\models \alpha \leftrightarrow \beta$$

- Sia  $\Gamma$  un insieme di proposizioni. Se  $\Gamma$  **implica logicamente**  $\alpha$ , scriveremo  $\Gamma \models \alpha$ . In altri termini:

$$\Gamma \models \alpha \text{ sse per ogni } \mathcal{M}, \mathcal{M} \models \Gamma \text{ implica } \mathcal{M} \models \alpha.$$

- Un insieme finito di proposizioni  $\Gamma$  è **insoddisfacibile** se e solo se  $\Gamma \models \perp$ .

### Teorema (Relazione tra implicazione logica e insoddisfacibilità)

$$\Gamma \models \alpha \text{ sse } \Gamma \cup \{\neg\alpha\} \models \perp.$$

# Implicazione logica

Teorema (Relazione tra implicazione logica e insoddisfacibilità)

$$\Gamma \models \alpha \text{ sse } \Gamma \cup \{\neg\alpha\} \models \perp.$$

Dimostrazione

# Implicazione logica

## Teorema (Relazione tra implicazione logica e insoddisfacibilità)

$$\Gamma \models \alpha \text{ sse } \Gamma \cup \{\neg\alpha\} \not\models \perp.$$

## Dimostrazione

- $\Gamma \cup \{\neg\alpha\} \not\models \perp.$

# Implicazione logica

## Teorema (Relazione tra implicazione logica e insoddisfacibilità)

$$\Gamma \models \alpha \text{ sse } \Gamma \cup \{\neg\alpha\} \not\models \perp.$$

## Dimostrazione

- $\Gamma \cup \{\neg\alpha\} \not\models \perp$ .
- Non esiste un  $\mathcal{M}$  t.c.  $\mathcal{M} \models \Gamma \cup \{\neg\alpha\}$  (definizione di insoddisfacibile).

# Implicazione logica

## Teorema (Relazione tra implicazione logica e insoddisfacibilità)

$$\Gamma \models \alpha \text{ sse } \Gamma \cup \{\neg\alpha\} \models \perp.$$

## Dimostrazione

- $\Gamma \cup \{\neg\alpha\} \models \perp$ .
- Non esiste un  $\mathcal{M}$  t.c.  $\mathcal{M} \models \Gamma \cup \{\neg\alpha\}$  (definizione di insoddisfacibile).
- Non esiste un  $\mathcal{M}$  t.c.  $\mathcal{M} \models \Gamma$  e  $\mathcal{M} \models \neg\alpha$  (modello di una congiunzione).

# Implicazione logica

## Teorema (Relazione tra implicazione logica e insoddisfacibilità)

$$\Gamma \models \alpha \text{ sse } \Gamma \cup \{\neg\alpha\} \models \perp.$$

## Dimostrazione

- $\Gamma \cup \{\neg\alpha\} \models \perp$ .
- Non esiste un  $\mathcal{M}$  t.c.  $\mathcal{M} \models \Gamma \cup \{\neg\alpha\}$  (definizione di insoddisfacibile).
- Non esiste un  $\mathcal{M}$  t.c.  $\mathcal{M} \models \Gamma$  e  $\mathcal{M} \models \neg\alpha$  (modello di una congiunzione).
- Per ogni  $\mathcal{M}$ ,  $\mathcal{M} \not\models \Gamma$  oppure  $\mathcal{M} \not\models \neg\alpha$  (legge intuitiva tra  $\exists$  e  $\forall$ ).

# Implicazione logica

## Teorema (Relazione tra implicazione logica e insoddisfacibilità)

$$\Gamma \models \alpha \text{ sse } \Gamma \cup \{\neg\alpha\} \models \perp.$$

## Dimostrazione

- $\Gamma \cup \{\neg\alpha\} \models \perp$ .
- Non esiste un  $\mathcal{M}$  t.c.  $\mathcal{M} \models \Gamma \cup \{\neg\alpha\}$  (definizione di insoddisfacibile).
- Non esiste un  $\mathcal{M}$  t.c.  $\mathcal{M} \models \Gamma$  e  $\mathcal{M} \models \neg\alpha$  (modello di una congiunzione).
- Per ogni  $\mathcal{M}$ ,  $\mathcal{M} \not\models \Gamma$  oppure  $\mathcal{M} \not\models \neg\alpha$  (legge intuitiva tra  $\exists$  e  $\forall$ ).
- Per ogni  $\mathcal{M}$ ,  $\mathcal{M} \models \Gamma$  implica  $\mathcal{M} \not\models \neg\alpha$  (def. di implicazione materiale).

# Implicazione logica

## Teorema (Relazione tra implicazione logica e insoddisfacibilità)

$$\Gamma \models \alpha \text{ sse } \Gamma \cup \{\neg\alpha\} \models \perp.$$

## Dimostrazione

- $\Gamma \cup \{\neg\alpha\} \models \perp$ .
- Non esiste un  $\mathcal{M}$  t.c.  $\mathcal{M} \models \Gamma \cup \{\neg\alpha\}$  (definizione di insoddisfacibile).
- Non esiste un  $\mathcal{M}$  t.c.  $\mathcal{M} \models \Gamma$  e  $\mathcal{M} \models \neg\alpha$  (modello di una congiunzione).
- Per ogni  $\mathcal{M}$ ,  $\mathcal{M} \not\models \Gamma$  oppure  $\mathcal{M} \not\models \neg\alpha$  (legge intuitiva tra  $\exists$  e  $\forall$ ).
- Per ogni  $\mathcal{M}$ ,  $\mathcal{M} \models \Gamma$  implica  $\mathcal{M} \not\models \neg\alpha$  (def. di implicazione materiale).
- Per ogni  $\mathcal{M}$ ,  $\mathcal{M} \models \Gamma$  implica  $\mathcal{M} \models \alpha$  (modello di una negazione).

# Implicazione logica

## Teorema (Relazione tra implicazione logica e insoddisfacibilità)

$$\Gamma \models \alpha \text{ sse } \Gamma \cup \{\neg\alpha\} \models \perp.$$

## Dimostrazione

- $\Gamma \cup \{\neg\alpha\} \models \perp$ .
- Non esiste un  $\mathcal{M}$  t.c.  $\mathcal{M} \models \Gamma \cup \{\neg\alpha\}$  (definizione di insoddisfacibile).
- Non esiste un  $\mathcal{M}$  t.c.  $\mathcal{M} \models \Gamma$  e  $\mathcal{M} \models \neg\alpha$  (modello di una congiunzione).
- Per ogni  $\mathcal{M}$ ,  $\mathcal{M} \not\models \Gamma$  oppure  $\mathcal{M} \not\models \neg\alpha$  (legge intuitiva tra  $\exists$  e  $\forall$ ).
- Per ogni  $\mathcal{M}$ ,  $\mathcal{M} \models \Gamma$  implica  $\mathcal{M} \not\models \neg\alpha$  (def. di implicazione materiale).
- Per ogni  $\mathcal{M}$ ,  $\mathcal{M} \models \Gamma$  implica  $\mathcal{M} \models \alpha$  (modello di una negazione).
- $\Gamma \models \alpha$  (definizione di implicazione logica).

## Compattezza della logica proposizionale

Cosa succede se abbiamo un insieme **infinito**  $\Gamma$  di proposizioni e vogliamo sapere se  $\Gamma \models \alpha$ ?

## Compattezza della logica proposizionale

Cosa succede se abbiamo un insieme **infinito**  $\Gamma$  di proposizioni e vogliamo sapere se  $\Gamma \models \alpha$ ?

### Teorema di Compattezza

Un insieme (infinito) di proposizioni  $\Gamma$  è *soddisfacibile* se e solo se ogni suo sottoinsieme finito è soddisfacibile.

*Equivalentemente*

Un insieme (infinito) di proposizioni  $\Gamma$  è *insoddisfacibile* se e solo se esiste un sottoinsieme finito che è insoddisfacibile.

## Compattezza della logica proposizionale

Cosa succede se abbiamo un insieme **infinito**  $\Gamma$  di proposizioni e vogliamo sapere se  $\Gamma \models \alpha$ ?

### Teorema di Compattezza

Un insieme (infinito) di proposizioni  $\Gamma$  è *soddisfacibile* se e solo se ogni suo sottoinsieme finito è soddisfacibile.

*Equivalentemente*

Un insieme (infinito) di proposizioni  $\Gamma$  è *insoddisfacibile* se e solo se esiste un sottoinsieme finito che è insoddisfacibile.

### Corollario

Sia  $\alpha$  una proposizione e  $\Gamma$  un insieme (infinito) di proposizioni. Se  $\Gamma \models \alpha$ , allora esiste un sottoinsieme finito di  $\Gamma$  che modella  $\alpha$ .